

Determinação da lâmina d'água em condutos circulares em regime permanente

Determination of water level in circular pipes in steady state

Luiz Carlos Helou – Engenheiro pela Escola Politécnica da Usp, PhD pela escola Politécnica da Usp e engenheiro do Departamento de Planejamento e Desenvolvimento Operacional da Sabesp

Resumo

A determinação da altura da lâmina d'água em canais abertos, particularmente condutos circulares, é um problema que apesar de bastante comum, não tem solução analítica explícita na grande maioria dos casos. O objetivo desse trabalho é a apresentação de uma metodologia que permite o cálculo da profundidade normal em canais de seção circular, em regime permanente uniforme, de duas formas distintas: uma numérica, iterativa e "exata", e uma segunda explícita, de aplicação imediata, porém "aproximada".

Abstract

The determination of the water level in circular pipes, in open channels is a problem that does not have explicit analytical solution in most cases. The objective of this work is the presentation of a methodology that allows the calculus of the normal depth in circular channel in steady state in two different ways: a numerical, iterative and "exact", and another one, that is explicit way, with immediate application, but "approximate".

Palavras-chave: conduto circular, métodos numéricos, profundidade normal, equação polinomial.

Key-words: circular conduct, numerical methods, normal depth, polynomial equation

Introdução

A determinação do nível d'água em canais circulares em regime permanente nem sempre pode ser obtido de maneira explícita e direta, o que força a busca por soluções aproximadas ou métodos iterativos. O objetivo desse trabalho é apresentar duas maneiras distintas para o cálculo do nível d'água em canais circulares; uma iterativa e exata, e uma segunda que apesar de um grau de aproximação bastante grande, assegura a resultados consistentes.

Metodologia

Apresentam-se a seguir, duas metodologias distintas para a abordagem do problema. Uma primeira recorrendo-se ao Método de Newton-Raphson e uma segunda, da qual se lança mão de uma aproximação polinomial (de quinto grau).

1) A solução numérica, iterativa e “exata”

O método de Newton-Raphson

É um método numérico largamente utilizado em que, basicamente, através de uma solução previamente assumida (primeira aproximação), chega-se com relativa rapidez à solução numérica do problema. Apesar de ser um método iterativo é de fácil aplicação sendo utilizado com relativa frequência em problemas de física e engenharia, onde a explicitação analítica da variável é impossível.

Assim, em geral, equações cuja variável independente x não pode ser explicitada apresentam soluções da forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{(Equação 1)}$$

Onde, admite-se conhecida “a priori” o valor de x_n , bem como as funções f e sua respectiva derivada f' em x_n . Então, a partir da solução anterior, calcula-se o valor da nova variável x_{n+1} e assim sucessivamente, até que a diferença entre os dois últimos valores esteja dentro de uma tolerância tida como aceitável. A convergência do método é, na maioria dos casos, bastante rápida. Nos exemplos apresentados, como estudo de caso, a tolerância atingida pelo método é bastante baixa, depois de apenas poucas iterações o que torna o método bastante atrativo do ponto de vista numérico.

Não é objeto desse estudo a análise aprofundada dessa metodologia, indicamos, porém literatura específica sobre o assunto, no final do trabalho.

A Equação de Chezy-Manning e a profundidade normal de um canal circular

A Equação de Chezy-Manning é dada por:

$$Q = C \cdot A \cdot \sqrt{R_n \cdot S_0} \quad \text{(Equação 2)}$$

onde:

Q é a vazão de escoamento $[L^3 \cdot T^{-1}]$.

C é o fator de resistência $[L^{1/2} \cdot T^{-1}]$

A é a área da seção molhada $[L^2]$

R_h é o raio hidráulico da seção (relação entre a área e o perímetro molhado) $[L]$

S_0 é a declividade do canal $[1]$

Para o fator de resistência C, Manning sugeriu a fórmula:

$$C = \frac{1}{n} \cdot R_h^{1/6} \quad \text{(Equação 3)}$$

Onde n é o coeficiente de rugosidade que depende da natureza do leito do canal: $[L^{1/3}]$

Como exemplo, seguem alguns valores do coeficiente de Manning:

Material do canal	n (s.m ^{-1/3})
Alvenaria de pedra bruta	0,020
Alvenaria de tijolos sem revestimento	0,017
Alvenaria de tijolos revestida	0,012
Canais de terra em boas condições	0,025
Canais de terra com vegetação	0,035
Manilhas cerâmicas	0,013
Tubos de concreto	0,013
Tubos de ferro fundido	0,012
Tubos de fibrocimento	0,011
Tubos de concreto lisos	0,012

Tabela 1: valores do coeficiente de Manning (Extraída de [4])

Aplicando a equação (3) em (2) resulta:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot R_h^{2/3} \cdot A \cdot \sqrt{S_0} \quad \text{(Equação 4)}$$

A Seção Circular

Seja a seção circular a seguir:

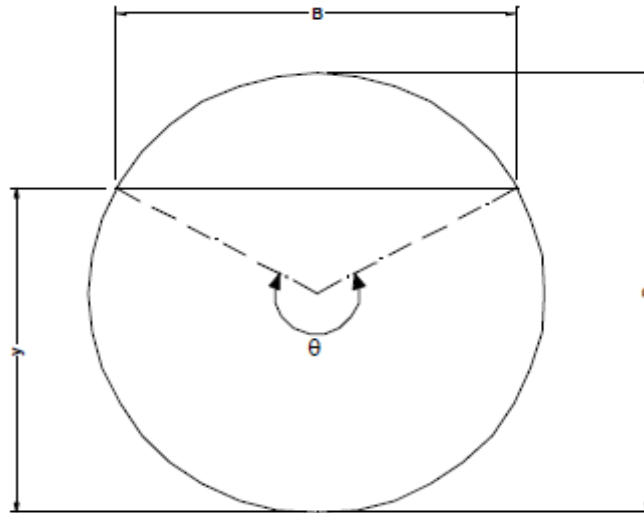


Fig.1 – Esquema de uma seção Circular Típica

Para a seção circular valem as seguintes relações geométricas:

Para a “área molhada” A
$$A = \frac{D^2}{8} \cdot (\theta - \text{sen}\theta) \quad \text{(Equação 5)}$$

Para o “perímetro molhado” P:
$$P = \frac{\theta \cdot D}{2} \quad \text{(Equação 6)}$$

Para o raio hidráulico R_h
$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{D}{4 \cdot \theta} (\theta - \text{sen}\theta) \quad \text{(Equação 7)}$$

Onde o ângulo central θ vale:
$$\theta = 2 \cdot \cos^{-1} \left(1 - 2 \cdot \frac{y}{D} \right) \quad \text{(Equação 8)}$$

A Profundidade Normal

Nesse caso a equação de Chezy-Manning pode ser escrita como:

$$\frac{Q \cdot n}{\sqrt{S_0}} = A \cdot R_h^{2/3} \quad \text{(Equação 9) ou}$$

$$f(\theta) = A \cdot R_h^{2/3} - \frac{Q \cdot n}{\sqrt{S_0}} = 0 \quad \text{(Equação 10)}$$

$$f(\theta) = \frac{D^2}{8} \cdot (-\operatorname{sen}\theta) \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \cdot \frac{(-\operatorname{sen}\theta)^{5/3}}{\theta^{2/3}} - \frac{Q \cdot n}{\sqrt{S_0}}$$

(Equação 11)

que pode ser reescrita como:

$$f(\theta) = \frac{D^{8/3}}{\left(2^{13/3}\right)} \cdot \frac{(-\operatorname{sen}\theta)^{5/3}}{\theta^{2/3}} - \frac{Q \cdot n}{\sqrt{S_0}} = 0 \text{ ou}$$

$$\frac{2^{13/3} \cdot Q \cdot n}{D^{8/3} \cdot \sqrt{S_0}} = \frac{(-\operatorname{sen}\theta)^{5/3}}{\theta^{2/3}}$$

(Equação 12)

Sejam as seguintes variáveis:

$$u = (-\operatorname{sen}\theta)^{5/3} \text{ (Equação 13)}$$

cuja derivada é:

$$u' = \frac{5}{3} \cdot (-\operatorname{sen}\theta)^{2/3} \cdot (-\cos\theta) \text{ (Equação 14)}$$

$$v = \theta^{2/3} \text{ (Equação 15)}$$

cuja derivada é

$$v' = \frac{2}{3} \cdot \theta^{-1/3} \text{ (Equação 16)}$$

sendo o quadrado da função v igual a

$$v^2 = \theta^{4/3} \text{ (Equação 17)}$$

Dessa maneira fica fácil estabelecer a função $f(\theta)$ e sua derivada $f'(\theta)$:

$$f(\theta) = \frac{u}{v} - \frac{2^{13/3} \cdot Q \cdot n}{D^{8/3} \cdot \sqrt{S_0}} \text{ (Equação 18)}$$

$$f'(\theta) = \frac{u'v + v'u}{v^2} \text{ (Equação 19)}$$

Uma vez conhecidas as funções $f(\theta)$ e $f'(\theta)$, determina-se θ , através da relação de Newton-Raphson, ou seja:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} \quad \text{(Equação 20)}$$

Ficando agora fácil a obtenção da profundidade normal y , através da expressão:

$$y_n = \frac{D}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{\theta_n}{2} \right) \quad \text{(Equação 21)}$$

Exemplo de aplicação

Determinar a lâmina d'água (y) em um conduto circular com as seguintes características:

$$Q = 1,5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \quad D = 2,00 \text{ m} \quad n = 0,013 \quad S_0 = 0,002 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\frac{2^{13/3} \cdot Q \cdot n}{D^{8/3} \cdot \sqrt{S_0}} = 1,3843$$

Seja, por exemplo, $\theta=2$, como primeira aproximação. Desta forma, basta construir a **tabela 2** para se obter os novos valores de θ das iterações subsequentes. As iterações terminam quando o valor seguinte e o anterior praticamente coincidirem, ou estiverem dentro de uma faixa aceitável de tolerância.

Iteração	0	1	2	3	4
θ	2,000	2,49	2,40	2,40	2,40
u	1,156	2,884	2,494	2,482	2,482
u'	2,501	4,574	4,179	4,166	4,166
v	1,587	1,838	1,794	1,793	1,793
v'	0,529	0,492	0,498	0,498	0,498
$f(\theta)$	-0,656	0,184	0,006	0,000	0,000
$f'(\theta)$	1,333	2,068	1,943	1,939	1,939
y	0,460	0,681	0,639	0,638	0,638
y/D	0,23	0,34	0,32	0,32	0,319

Tabela 2 – Tabela resumo para o cálculo da profundidade normal

2) A solução explícita mas “aproximada”

A se aproximar um polinômio do quinto grau à função $f(\theta)$, através do método dos mínimos quadrados, com passo de $\pi/20$ para valores de θ , e fixando-se y/D entre 0,0015 (que corresponde a $\theta = \pi/20$), e 0,9455 (que corresponde a $\theta = 34 \cdot \pi/20$), por exemplo, tem-se:

$$\frac{y}{D} = \sum_{n=0}^5 a_n \cdot x^n \quad \text{(Equação 22)}$$

cujos coeficientes são:

$$a_0 = 0,0276 \quad a_1 = 0,4235 \quad a_2 = -0,2363$$

$$a_3 = 0,0779 \quad a_4 = -0,0119 \quad a_5 = 0,0007$$

e onde a variável independente x , é $\frac{2^{13/3} \cdot Q \cdot n}{D^{8/3} \cdot \sqrt{S_0}}$ (Equação 23)

Fixa-se o máximo y/D em 0,945, devido ao fato de que a partir de valores superiores a 0,938 a função deixa de existir, já que as vazões decrescem à medida que a lâmina aumenta, conforme se demonstra adiante.

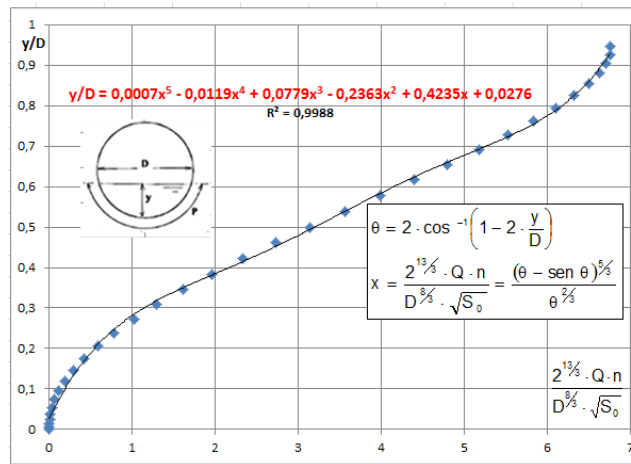


Fig. 2- Gráfico do polinômio de quinto grau para obtenção da relação y/D

Resultados e Discussão

Para que seja possível a comparação das duas metodologias, confrontaram-se as duas formas de cálculo, através do exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

Para os mesmos dados do problema anterior, tem-se:

$$x = \frac{2^{13/3} Q \cdot n}{D^{8/3} \cdot \sqrt{S_0}} = 1,3843$$

$$\frac{y}{D} = \sum_{n=0}^5 a_n x^n = 0,327$$

Resultando em uma lâmina de 0,658 m, uma diferença de menos de 0,6% em relação ao valor obtido através do método de Newton (0,654m).

Determinação da profundidade onde a vazão é máxima

O círculo é uma figura geométrica bastante curiosa. Uma roda, por exemplo, ao se deslocar em um plano, têm em sua periferia pontos que se deslocam com velocidade negativa, por alguns instantes, em relação ao plano do deslocamento. E, paradoxalmente, no caso de regime permanente e uniforme, a seção plena não é aquela que transporta a máxima vazão, devido à geometria curva da própria seção.

Para determinação dessa profundidade, basta igualar a derivada da função $f(\theta)$ à zero, pois nesse caso a função apresentará um ponto de máximo (basta observar o gráfico da figura 2). Desta forma:

$$f'(\theta) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = 0$$
$$\text{num} = \frac{5}{3} (-\sin\theta)^{\frac{2}{3}} - (-\cos\theta)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \theta^{-\frac{1}{3}} (-\sin\theta)^{\frac{5}{3}}$$
$$\text{den} = \theta^{\frac{4}{3}}$$

Equação 24)

cuja raiz é $\theta=5,28$ que equivale a um ângulo central de $302,41^\circ$ ou a uma profundidade adimensional (y/D) de **0,938**.

Em resumo, a partir desse valor ($y/D=0,938$) as vazões começam a diminuir. Portanto a validade da formulação

matemática é de $0 < \frac{y}{D} < 0,938$

Conclusão:

Este trabalho procurou apresentar duas formas de se obter a profundidade normal em canais circulares, cujas seções são bastante comuns em problemas de engenharia, como coletores de esgotos ou de águas pluviais, através do método numérico (Newton-Raphson) e de uma aproximação polinomial de quinto grau. Os resultados mostram que as aproximações feitas praticamente não influenciam na solução do problema, haja vista o alto coeficiente de regressão linear obtido ($r^2 > 0,99$)

Referências Bibliográficas:

- [1] Asano C.H, Colli E. “Cálculo Numérico – Fundamentos e Aplicações” Universidade de São Paulo, Departamento de Matemática Aplicada (IME), Dez. 2009.
- [2] Barros, I. Q. “Introdução ao Cálculo Numérico” – Editora Edgar Blucher e Editora da Universidade de São Paulo, 1972.
- [3] Departamento de Engenharia Hidráulica e Sanitária da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo “Condutos Livres – Notas de Aula do Curso PHD 3201 – Hidráulica 1”, 2004.
- [4] da Costa, Teixeira & Lança, R.: “Condutos Livres”, Escola Superior de Tecnologia do Algarve, 2001, Capítulo IX
- [5] Chow, Ven Te. “Open–Channel Hydraulics”. McGraw-Hill International Book Company, 1985.
- [6] Fox McDonald: “Introdução a Mecânica dos Fluidos”, 4ª edição, LTC Livros Técnicos e Científicos SA, 1997.
- [7] Netto, A. “Manual de Hidráulica”, 8ª edição, Editora Edgar Blucher, 1998.